Accessibility (Network Analysis)

Thomas Grossmann* Thomas Grossmann†

13. Mai 2014

*UNIZH thomas.grossmann@geo.uzh.ch, Overall
†UNIZH fisler@geo.uzh.ch, Specials

Inhaltsverzeichnis

1 Accessibility (Network Analysis)

In der räumlichen Analyse interessieren oft nicht nur die Eigenschaften der untersuchten Objekte selbst, sondern v. a. die Beziehungen zwischen ihnen. Wie in der Lektion "Räumliche Abfragen" ausführlich diskutiert wird, können mannigfaltige Beziehungen zwischen Objekten untersucht werden. Es können zunächst einmal thematische (oder semantische), räumliche und zeitliche Beziehungen festgestellt werden. Die räumlichen Beziehungen können unterschieden werden in: topologische Beziehungen, Richtungsbeziehungen und Distanzbeziehungen. Von diesen drei räumlichen Beziehungen interessieren in dieser Lektion vor allem die Distanzbeziehungen. Durch Methoden, die solche Distanzen oder Proximitäten ermitteln lassen, können Antworten auf Fragen gefunden werden, wie:

- Welches ist der nächste Bahnhof?
- Wie viele Apotheken gibt es im Umkreis von 300m von einem bestimmten Standort?
- Welches ist die beste Wohnlage, wenn der gesamte Weg zwischen Kindergarten, Schule und Einkaufsmöglichkeit minimal sein soll?
- Wie viele Einwohner leben im Einzugsgebiet eines Einkaufszentrums?

Die Distanzmasse, die wir bis jetzt besprochen haben, waren ungehindert in ihrer Ausdehnung und uneingeschränkt in ihrer Richtung. Die meisten Bewegungen im geographischen Raum sind jedoch auf lineare Netze beschränkt, vielfach sind Bewegungen querfeldein nicht möglich. Sogar Flugwege sind begrenzt auf Korridore. Die meisten Bewegungen fliessen entlang von fixen Kanälen: Strassenbahnen (vgl. Abbildung), Pipelines, Telefondrähte, Flusstäler usw. Netzwerke sind für alle Bereiche der Raumwissenschaften von allgemeiner Bedeutung. Vor allem im planerischen Bereich ist die Analyse von Netzwerkstrukturen eine wichtige Aufgabe. So geht es dabei beispielsweise um:

- Optimierung von Netzen: Verbesserung der Verkehrserschliessung durch zusätzliche Strecken im S-Bahnnetz
- Optimale Routenwahl: Planung von Sammeltouren im Abfuhrwesen; Einsatzplanung für Notfalldienste
- Abgrenzen von Einzugsgebieten: Abgrenzung von Feuerwehrkreisen nach Erreichbarkeit im Strassennetz

- Optimale Platzierung im Netz: Angebotszentren (Schulen, Einkaufszentren) im Netz optimal platzieren, d. h. Lokalisierung und Zuteilung von Angebot und Nachfrage.

Eine Vorbedingung für die Analyse solcher Netzwerke ist die analytische Beschreibung und Kenntnis der Netzstrukturen. Dabei geht es im Allgemeinen um die Erreichbarkeit von Objekten. Es lassen sich so Antworten auf folgende Fragen finden:

- Struktureigenschaften eines Netzes: Wie dicht (wie gut verbunden) ist ein Netz?
- Erreichbarkeit von Orten: Wie gut erschlossen ist Ort i im Vergleich zu Ort j (wie oft muss man z. B. umsteigen)?
- Lage im Netz: Welches sind zentrale Orte (d. h. geeignete Umsteigeknoten)?

Der Netzwerkanalyse und -beschreibung liegt die Graphentheorie zugrunde. Damit lassen sich Netze abstrakter und allgemeiner als sogenannte Graphen beschreiben.

Beispiel: Für viele geographische Fragestellungen oder auch im alltäglichen Leben ist es nicht nötig, die genauen Koordinaten (xi , yi) zu kennen. Um von einem Knoten zu einem anderen Knoten in einem Netzwerk zu gelangen, ist es vor allem wichtig, die Verbindungen zwischen diesen Knoten zu kennen. Die Karte (Ausschnitt) der Londoner Untergrundbahn zum Beispiel enthält alle hilfreichen Informationen, um von einer Station i zu einer Station j zu gelangen. Diese topologische Repräsentation erlaubt uns zu sehen, wie einfach es ist, zwischen Stationen zu reisen, die nicht benachbart sind, und wo umzusteigen ist.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 1: Kartenausschnitt Londoner U-Bahn. Klicke auf Karte, um die ganze Karte als PDF zu sehen (evtl. re-Click -> in neuem Fester öffnen). [?]

Lernziele

- Sie kennen die wesentlichen Begriffe, um ein Netz bzw. einen Graphen zu charakterisieren.

- Sie sind in der Lage, einfache Masse zur topologischen und geometrischen Beschreibung von Netzwerken aufzuzählen und zu erklären und können Beispiele für ihre Anwendung geben.
- You will know the most used and famous algorithm, which calculates the shortest path between two points.
- You know the problem of the traveling salesman and can explain a heuristic solution.
- You can describe the different steps of both algorithms and calculate on paper a route for simple cases.

1.1 What are networks

Um die Theorie von Netzwerken zu verstehen, benötigt es eine genaue Kenntnis der Grundelemente und der verschiedenen Ausprägungen von Netzwerken. In dieser Unit wird es daher darum gehen darzustellen, aus welchen Elementen sich Netzwerke zusammensetzen, bzw. welche Arten von Netzwerken es gibt. Dabei werden die folgenden Konzepte vorgestellt:

- Graphen
- Elemente von Graphen: Knoten und Kanten
- Ungerichtete und gerichtete Graphen
- planare und nicht-planare Graphen
- Adjazenzmatrix

1.1.1 Primitives of a Network

Begriffe zur Graphentheorie und zu Netzwerken

Mit Graphen ist eine umfangreiche Begrifflichkeit verknüpft, die meisten Begriffe haben aber eine einfache Definition. Ein *Graph* besteht aus einer Menge von Knoten V und Kanten E (Beispiel: Graph A). *Knoten* repräsentieren Objekte, die Namen und andere Eigenschaften haben können, z. B. eine Umsteigestation in einer U-Bahn. Eine *Kante* ist eine Verbindung zwischen zwei Knoten z. B. die Flugverbindung zwischen Zürich und Berlin. Zwei Knoten sind benachbart (engl. adjacent), wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Graphen können visualisiert werden, indem man die Knoten durch Punkte und diese durch Linien verbindet, welche die Kanten darstellen (Graphen A-K). Dabei darf man nicht vergessen, dass der Graph unabhängig von der Darstellung definiert ist. Die beiden Figuren A und B stellen den gleichen Graphen dar.

Ein *Pfad* von Knoten s zu Knoten e in einem Graph ist eine Liste von benachbarten Knoten. Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad, auf dem sich keine Knoten wiederholen. Ein *zusammenhängender Graph* besitzt von jedem Knoten zu einem anderen Knoten einen Pfad. Ein nicht zusammenhängender Graph zerfällt in zusammenhängende Komponenten (Graph C).

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
Elemente eines Graphen	zusammenhängend	nicht zusammenhängend

Tabelle 1: Legende fehlt

Ein *Zyklus* ist ein einfacher Pfad, bei dem der erste und der letzte Knoten identisch sind (Graph E). Ein Graph ohne Zyklen wird *Baum* genannt (Graph K). Bäume haben eine hierarchische Struktur und werden oft explizit so dargestellt.

Graphen, in denen alle Kanten vorhanden sind, werden *vollständige Graphen* genannt (Graph F). Graphen mit relativ wenigen Kanten bezeichnet man als *licht*; Graphen, bei denen relativ wenige der möglichen Kanten fehlen, werden als *dicht* bezeichnet. *Gewichtete Graphen* (Graph G) sind Graphen, bei denen den Kanten Zahlenwerte (Gewichte) zugewiesen werden, um Entfernungen (zeitlich oder geometrisch) oder Kosten darzustellen. Dadurch werden mit dem Graphen mehr Informationen verknüpft.

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
	zyklisch	vollständig	gewichtet

Tabelle 2: Ungerichtete Graphen:

In *gerichteten Graphen* sind Kanten "Einbahnstrassen" (Graph H); eine Kante kann von x nach y führen, aber nicht von y nach x . Gerichtete Graphen ohne *gerichtete Zyklen* (gerichtete Zyklen: alle Kanten zeigen in die gleiche Richtung) werden *gerichtete azyklische Graphen* genannt (Graph I). Gerichtete gewichtete Graphen werden *Netzwerk* genannt (Graph J). Umgangssprachlich und in der Geographie wird der Begriff des Netzes oder Netzwerks (engl. network) jedoch oft für alle Arten von Graphen verwendet.

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
zyklisch	azyklisch	gerichtet + gewichtet = Netzwerk	hierarchisch

Tabelle 3: Gerichtete Graphen:

Es werden zudem **planare** von **nicht-planaren** Graphen unterschieden werden. Bei planaren Graphen handelt es sich um solche, die auf einer Ebene abgebildet werden können, ohne dass ihre Kanten sich schneiden (vgl. Abbildung E. im Gegensatz zu Abbildung F.).

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
planar	nicht-planar

Tabelle 4: Planare vs. nicht-planere Graphen:

Eine weitere einfache Darstellungsform für Graphen, die auch von einem Digitalrechner bearbeitet werden kann, ist die *Adjazenzmatrix* (engl. adjacency matrix). Es wird eine Matrix von der Grösse VxV definiert, wobei V die Anzahl der Knoten ist. Die Felder werden auf 1 gesetzt, wenn eine Kante zwischen den Knoten z. B. a und b existiert, und auf 0, wenn keine solche Kante vorhanden ist. Im Beispiel gehen wir davon aus, dass von jedem Knoten eine Kante zu sich selbst existiert. Ob man die Diagonale auf 1 oder auf 0 setzt, ist vom Verwendungszweck abhängig. In manchen Fällen ist es günstiger, die Diagonalen auf 0 zu setzen. Die Matrix heisst Adjazenzmatrix, weil die Struktur dieser Matrix angibt, welche Knoten benachbart sind (d. h. adjazent). Etwas Ähnliches ist mit Gewichten möglich: Dann werden anstelle des Werts 1 die Gewichte in die Felder geschrieben.

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.	**Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
Adjazenzmatrix	Matrix mit Gewichten

Tabelle 5: Legende fehlt

Im Zusammenhang mit der Beschreibung und Analyse von Netzen wird oft der Begriff der Topologie (engl. topology) gebraucht. Dieser Begriff und die zugehörigen Konzepte werden im Modul "Räumliche Modellierung" ausführlich erläutert. Die in untenstehender Abbildung dargestellten Netze besitzen topologisch äquivalente Verbindungen, d.h. es handelt sich um topologisch äquivalente Graphen.

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. Zwei topologisch äquivalente Graphen

Tabelle 6: Legende fehlt

1.2 Structural Properties of a Network

Nachdem wir uns mit den Grundbausteinen von Netzwerken ausführlich auseinandergesetzt haben, wollen wir uns nun mit den Möglichkeiten beschäftigen, mit Hilfe derer die Struktur von Netzwerken erfasst und beschrieben werden kann. Dafür stehen uns folgenden Masse zu Verfügung:

- Konnektivität (Beta-Index)
- Durchmesser eines Graphen
- Erreichbarkeit von Knoten bzw. Orten
- Zentralität / Lage im Netz
- Hierarchien in baumartigen Netzen

Für die meisten dieser Masse werden wir einen ungewichteten und einen gewichteten (metrischen) Fall vorstellen.

1.2.1 Konnektivität (Beta-Index)

Das einfachste Mass für den Grad der *Konnektivität* (Erschliessungsqualität, Zusammenhang, Verbundenheit) eines Graphen ist der Beta-Index. Er gibt die Dichte der Verbindungen an und ist definiert als:

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 2: formula1.gif

wobei E die Anzahl der Kanten ist und V die Anzahl der Knoten im Graphen.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 3: Beta-Index berechnet für verschiedene Graphen

In der Abbildung oben ist bei den ersten drei Graphen die Anzahl der Knoten konstant gehalten und die Anzahl der Kanten nimmt zu, bis der Graph vollständig ist. Die Werte des Beta-Index nehmen entsprechend zu, je mehr Verbindungen zwischen den Knoten existieren. Die Werte für den Index gehen von 0 aus und sind gegen oben offen, wobei Werte kleiner als 1 auf einen Baum oder auf einen unzusammenhängenden Graphen verweisen. Der Wert 1 zeigt an, dass der Graph nur einen einzigen Zyklus besitzt. Je grösser der Index, desto grösser die Dichte. Damit lassen sich zum Beispiel Bahnnetze verschiedener Regionen oder Länder miteinander vergleichen.

Mit einem solchen Mass lassen sich auch regionale Unterschiede beschreiben. In der nebenstehenden Grafik, wird das Eisenbahnnetz ausgewählter Länder mit der allgemeinen ökonomischen Entwicklung (anhand des Energieverbrauchs-Index in den 60er Jahren) verknüpft. Der Energieverbrauch ist auf der y -Achse geplotted gegenüber dem Mass der Konnektivität (Beta-Index) auf der x -Achse. Dort wo die Konnektivität hoch ist, ist auch die ökonomische Entwicklung weiter fortgeschritten.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 4: Energieverbrauch gegenüber dem Mass an Konnektivität [?]

1.2.2 Durchmesser eines Graphen

Ein weiteres Mass für die Struktur eines Graphen ist sein Durchmesser (engl. diameter). Der Durchmesser Delta ist ein Index, der die topologische Länge oder Ausdehnung eines Graphen misst, indem die Anzahl der Kanten des kürzesten Wegs zwischen den am weitesten entfernten Knoten bestimmt wird. Es gilt

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 5: formula2.gif

wobei s (i , j) gleich der kleinsten Kantendistanz (Kantendistanz = Anzahl der Kanten entlang eines Pfades) zwischen dem Knoten i und j ist. Die Formel ist so zu verstehen, dass alle kürzesten Wege zwischen allen Knoten gesucht werden und dann der längste (maximale) ausgewählt wird. Somit handelt es sich bei diesem Mass um den längsten kürzesten Weg zwischen zwei beliebigen Knoten eines Graphen.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 6: diameter1.gif

Bei den ersten beiden Darstellungen des Graphen A, sind mögliche Pfade eingezeichnet, aber nicht die kürzesten. Im dritten Graph (und auch im Graph B) ist der längste kürzeste Weg eingezeichnet.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 7: diameter2.gif

Neben der rein topologischen Anwendung kann den Kanten ihre effektive Streckenlänge oder ein anderes Gewicht (z. B. Reisezeit) zugewiesen werden. Daraus lässt sich ein etwas komplexeres und auf der Metrik des Netzes beruhendes Mass bestimmen. Der resultierende Index ist $pi = mT/md$, wobei mT die metrische Gesamtlänge des Netzes ist und md der metrischen

Länge des Durchmessers entspricht. Je grösser *pi* ist, umso dichter ist ein Netz verbunden.

1.2.3 Erreichbarkeit von Knoten bzw. Orten

Eine häufige Fragestellung bei der Analyse von Verkehrsnetzen ist die Abklärung der Erreichbarkeit bestimmter Verkehrsknoten und damit der von ihnen erschlossenen Gebiete. Ein Mass für die Erreichbarkeit (engl. accessibility) kann durch die in der Animation gezeigte Methode ermittelt werden. Für die Erreichbarkeit Ei eines Knoten i gilt

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 8: formula3.gif

wobei v gleich der Anzahl der Knoten im Netz und $n(i,j)$ gleich der kürzesten Knotendistanz (Knotendistanz = Anzahl der Knoten entlang eines Pfades) zwischen den Knoten i und j ist. Es wird also für jeden Knoten i die Summe aller kürzesten Knotendistanzen $n(i,j)$ zu jedem anderen Knoten gebildet, was sich am besten mit einer Matrix machen lässt. Die Knotendistanz zwischen zwei Knoten i und j entspricht der Anzahl dazwischen liegender Knoten. Für jeden Knoten wird anschliessend die Summe gebildet. Dabei ist die Erreichbarkeit umso schlechter, je grösser die Summe ist (Knoten A), und umso besser, je kleiner die Summe ist (Knoten C).

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 9: erreichbarkeit.swf

Die Bedeutung der Knotendistanz liegt darin begründet, dass Knoten auch Umsteigebahnhöfe, Umladeorte für Güter oder U-Bahn-Stationen sein können. Damit behindert eine grosse Knotendistanz die Reise durchs Netz.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 10: Berechnen der Erreichbarkeit Ei

Wie schon beim Durchmesser eines Netzes kann neben der rein topologischen Knotendistanz auch eine gewichtete Kantendistanz verwendet werden. Beispiele für mögliche Gewichtungsfaktoren sind: die Distanzen in Kilometern oder als Reisezeit sowie als Transportkosten usw. Für dieses gewichtete Mass wird aber nicht mehr die Knotendistanz verwendet, sondern die Kantendistanz. Es gilt daher

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 11: formula4.gif

wobei e die Anzahl der Kanten und $s\ (\ i\ ,\ j\ )$ der kürzeste gewichtete Pfad zwischen zwei Knoten ist.

1.2.4 Zentralität / Lage im Netz

Das erste Mass für die Beschreibung der Zentralität eines Knotens in einem Netz wurde von König 1936 entwickelt, die sogenannte *Königszahl* Ki . s (i , j) bezeichnet die Anzahl der Kanten des kürzesten Pfades von Knoten i zu Knoten j . Dann ist die Königszahl für den Knoten i definiert als

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 12: formula5.gif

wobei s (i , j) gleich der kürzesten Kantendistanz zwischen den Knoten i und j ist. Somit entspricht Ki dem längsten kürzesten Pfad ausgehend von Knoten i . Es ist ein Mass für die topologische Distanz mittels Kanten und besagt, je kleiner die Königszahl eines Knotens i ist, umso zentraler liegt dieser im Netz.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 13: koenigszahl1.gif

Wenn man die kürzesten Kantendistanzen zwischen den Knoten ermittelt hat, dann ist der grösste Wert einer Spalte die Königszahl (blau markiert). Im Beispiel liegt der orange Knoten zentral und die beiden grünen Knoten sind peripher.

Auch die Methode zur Ermittlung der Königszahl ist anwendbar auf eine Distanzmatrix. Nebenstehend ist noch einmal das Beispiel der Erreichbarkeit abgebildet. Diesmal wird die Matrix mit denselben Werten zur Berechnung der Königszahl verwendet.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 14: koenigszahl2.gif

1.2.5 Hierarchien in baumartigen Netzen

In der quantitativen Geomorphologie wurden für die Fluvialmorphologie verschiedene Verfahren zur Strukturierung und Ordnung von hierarchischen Flussnetzen entwickelt. So können verschiedene Netze untereinander verglichen werden (z. B. aufgrund der höchsten auftretenden Ordnung oder der relativen Häufigkeiten der einzelnen Ordnungsstufen), und es können auch auf einfache Weise Untereinzugsgebiete ausgeschieden werden. Von den vier Ordnungsschemata in den folgenden Abbildungen sind drei ausschliesslich topologisch definiert, während die Ordnung nach Horton als Einzige auch die metrische Komponente berücksichtigt.

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. Strahler-Ordnung	Die *Strahler-Ordnung* wird bestimmt, indem von den äussersten Ästen ausgegangen wird. Diesen äussersten Ästen weist man den Ordnungswert 1 zu. Treffen zwei Äste aufeinander, wird, wenn beide Äste die gleiche Ordnung besitzen, für den weiter unten liegenden Ast die Ordnung um 1 erhöht. Ansonsten wird die höhere Ordnung der beiden Äste eingesetzt. Formal und einfach ausgedrückt: **Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. wobei *e1* und *e2* die zusammenfliessenden Teilbäume sind und *e3* der weiterführende Ast ist. Auf der Basis der Strahler-Ordnung kann die Bifurcation Ratio (Gabelungsverhältnis) ermittelt werden **Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. wobei *Ns1* die Anzahl der Kanten einer bestimmten Ordnung (z. B. der Ordnung 1) ist und *Ns2* die Anzahl der Kanten der nächsthöheren Ordnung (Ordnung 2) gilt. Im Beispiel der vorliegenden Abbildung ist *Ns1* =15 und *Ns2* =7, womit sich folgendes Gabelungsverhältnis ergibt: **Hinweis:** Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.
Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. Horton-Ordnung	In der *Horton-Ordnung* wird zunächst eine Ordnung nach Strahler bestimmt. Danach wird dem metrisch längsten Ast der jeweils verbleibenden Teilbäume die noch geltende höchste Ordnung grösser als 2 zugewiesen.

Tabelle 7: Legende fehlt

Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. Shreve-Ordnung	Die *Shreve-Ordnung* (auch Magnitude genannt) eines Teilbaumes gibt an, wie viele Abschnitte erster Ordnung (oder "Quellen") flussaufwärts liegen. Eine mögliche Anwendung dieser Ordnung ausserhalb der Hydro- oder Geomorphologie liegt in der Wahl von Strichbreiten bei der kartographischen Darstellung von Flussnetzen.
Hinweis: Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar. Ordnung nach Pfadlänge	Eine einfache *Ordnung nach Pfadlänge* besteht darin, die Pfadlänge ausgehend von der Wurzel des Baumes zu bestimmen.

Tabelle 7: Legende fehlt

1.3 Dijkstra Algorithm

Ein häufiger Anwendungsfall im Bereich der Netzwerkanalyse liegt in der Berechnung kürzester Wege. Dafür bieten sich unterschiedliche Algorithmen. Ein sehr gebräuchlicher Algorithmus für die Berechnung der kürzesten Distanz zwischen zwei Knoten in einem Netzwerk ist der Dijkstra Algorithmus. Er kommt zum Einsatz in kantengewichteten Graphen und setzt voraus, dass es sich bei den Gewichtungen um ausschliesslich positive Werte handelt.

In dieser Unit geht es um die Erläuterung der Funktionsweise des Dijkstra Algorithmus. Es wird der Pseudocode für die Implementierung des Algorithmus vorgestellt und anhand einer Animation das Prinzip des Algorithmus schrittweise veranschaulicht.

1.3.1 Dijkstra Algorithm: Short terms and Pseudocode

Mit Hilfe des Dijkstra Algorithmus ist es möglich die kürzeste Distanz (bzw. den geringsten Aufwand / die geringsten Kosten) zwischen einem Anfangsknoten und einem beliebigen Knoten innerhalb eines Graphen zu bestimmen.

Funktionsweise:

Die Grundidee des Algorithmus ist, ab einem Startknoten die kürzest möglichen Wege weiter zu verfolgen und längere Wege beim Updaten auszuschließen. Er besteht im wesentlichen aus diesen Schritten:

1. Initialisierung aller Knoten mit der Distanz "unendlich", die des Startknotens mit 0.
2. Markierung der Distanz des Startknotens als permanent, alle anderen Distanzen als temporär.
3. Setze Startknoten als aktiv.
4. Berechne die temporären Distanzen aller Nachbarknoten des aktiven Knotens durch Addition von dessen Distanz mit den Kantengewichten.
5. Wenn eine solche berechnete Distanz für einen Knoten kleiner ist als die aktuelle, aktualisiere die Distanz und setze den aktuellen Knoten als Vorgänger. Dieser Schritt wird auch als Update bezeichnet und ist die zentrale Idee von Dijkstra.
6. Wähle einen Knoten mit minimaler temporärer Distanz als aktiv. Markiere seine Distanz als permanent.
7. Wiederhole 4-7, bis es keinen Knoten mit permanenter Distanz gibt, dessen Nachbarn noch temporäre Distanzen haben.

Funktionsweise:

The idea of the algorithm is to, beginning from a starting point, continiously calculate the smallest distance and to exclude longer distances when making an update. It consists of the following steps:

1. Initialization of all nodes with distance "infinit", the one of the starting node with 0.
2. Marking of the distance of the starting node as permanent, all other distances as temporarily.
3. Setting of starting node as active.

4. Calculation of the temporary distances of all neighbour nodes of the active node by summing up its distance with the weights of the edges.

5. If such a calculated distance of a node is smaller as the current one, update the distance and set the current node as antecessor. This step is also called update and is Dijkstra's central idea.

6. Setting of the node with the minimal temporary distance as active. Mark its distance as permanent.

7. Repeating of steps 4 to 7 until there aren't any nodes left with a permanent distance, which neighbours still have temporary distances.

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 15: Legende fehlt

1.3.2 Dijkstra Algorithm: Step by Step

Die Animation unten zeigt das Prinzip des Dijkstra Algorithmus Schritt für Schritt anhand eines konkreten Anwendungsbeispiels. Dabei überlegt eine Person, welcher Weg von Bucheggplatz bis Stauffacher in Zürich mittels Tram wohl der kürzeste ist...

Hinweis:
Dieses Element (Animation, Video etc.) kann nicht dargestellt werden und ist nur in der Onlineversion sichtbar.

Abbildung 16: Dijkstra Algorithm

1.3.3 Anwendungen, Erweiterungen und Alternativen

Es gibt unterschiedliche Anwendungs- und Spezialfälle bei denen der Dijkstra Algorithmus Anwendung findet. Neben der Routenplanung als klassische Disziplin kann die Distanzberechnung auch in Bereichen genutzt werden, die nicht etwa euklidische Distanzen, sondern Zeit oder Kosten zur Grundlage haben. Zu den Spezialanwendungen des Algorithmus von Dijkstra gehören z.B. auch:

- Routing in Computernetzwerken

Zusätzlich zur Gewichtung der Kanten können auch auch Gewichte für Knoten festgelegt werden. Dies könnte beispielsweise der Fall sein, wenn der Umsteigevorgang innerhalb des Knotens "Hauptbahnhof" mit einem hohen Aufwand verbunden ist. In diesem Falle erhält der Knoten eine eigene Gewichtung, die dann in der Berechnung der kürzesten Wege berücksichtigt werden muss.

Der Dijkstra Algorithmus funktioniert nicht mit negativen Kantengewichtungen. Soll dennoch eine Shortest-Path-Berechnung durchgeführt werden, müssen andere Algorithmen zum Einsatz, wie etwa der Bellman-Ford-Algorthmus.

Der Algorithmus von Dijkstra ist nicht für alle Anwendungsfälle und Graphentypen geeignet. Weitere Algorithmen sind z.B. der Algorithmus von Kruskal oder der Algorithmus von Borvka zur Berechnung minimaler Spannbäume in ungerichteten Graphen.

1.4 Traveling Salesman Problem

In der Routenplanung ist man mit Problemen unterschiedlicher Art konfrontiert. Dazu gehört auch das vieldiskutierte Problem des Handlungsreisenden (Travelling-Salesman). Es geht dabei darum, die Reihenfolge für den Besuch mehrerer Orte so zu optimieren, dass der Gesamtreiseweg nach Rückkehr zum Ausgangsort möglichst kurz ist. Insbesondere wenn nicht euklidische Distanzen, sondern Zeit oder Kosten als Grundlage für die Routenberechnung dienen sollen, wird die Berechnung mittels einfacher Methoden erschwert [**?**] .

Hinweis: Insbesondere im Zusammenhang mit der Routenoptimierung bei der Planung von Lieferrouten spricht man auch vom Vehicle Routing Problem, welches weitere Kriterien der Planung von Lieferungsplanung beinhaltet.

Diese Unit geht einführend auf das Problem des Handlungsreisenden ein, führt unterschiedliche Szenarien auf, welche insbesondere im Sinne des Vehicle Routings die Vielschichtigkeit des Problems demonstrieren und stellt die verschiedenen Ansätze vor, die zur Lösung des Problems herangezogen werden können. Dazu gehören [**?**] :

- Exakte Lösungsverfahren
- Heuristische Lösungsverfahren
- Interaktive Lösungsverfahren
- Kombinierte Lösungsverfahren

1.4.1 Kriterien des Vehicle Routings

Neben der Optimierung der Planung im Sinne der Berechnug des minimalen Gesamtreisewegs, kommen beim Vehicle Routing auch spezifische Faktoren wie die Minimierung der globalen Transportkosten (Fahrtkosten + Fixkosten der Fahrzeuge), Minimierung der Anzahl der benutzten Fahrzeuge und der Ausgleich der Touren im Hinblick auf Fahrzeiten und Lademengen hinzu.

Je nach lieferspezifischen Bedingungen kann das Vehicle Routing Problem in unterschiedliche Varianten untergliedert werden [**?**] :

- **Capacited VRP (CVRP):** Waren und Fahrzeuge mit vorab festgelegter Kapazität. Waren können nicht aufgeteilt werden, es gibt nur ein Depot und alle Fahrzeuge haben die gleiche Kapazität.
- **VRP with Time Windows (VRPTW):** Kunden sollen innerhalb festgelegter Zeitfenster mit Waren beliefert werden.
- **VRP with Pickup and Delivery(VRPPD):** Waren können beim Kunden sowohl ab- als auch aufgeladen werden.
- **VRP with Backhaul (VRPB):** Waren können entweder ab- oder aufgeladen werden.
- **Distance-Constrained CVRP (DCVRP):** Es ist eine maximale Distanz- oder Zeitdauer vorgeben.
- **Multi Depot VRP (MDVRP):** Es existieren mehrere Depots.

Die folgende Abbildung zeigt die Basisvarianten des Vehicle Routings und deren Mischformen.

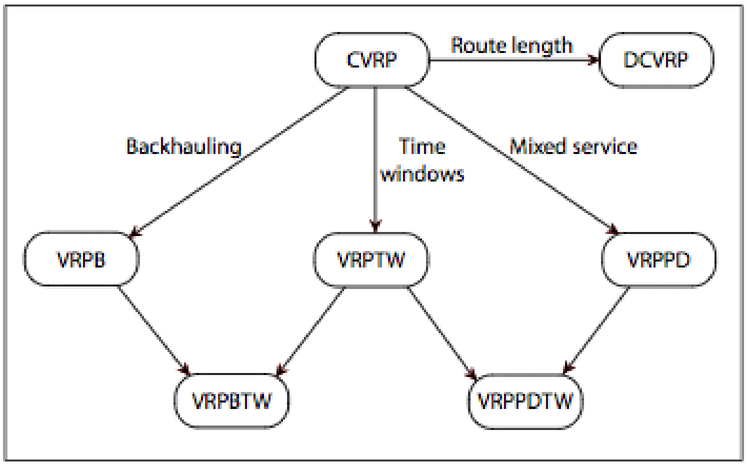

Abbildung 17: Basisvarianten des Vehicle Routings [?]

1.4.2 Lösungsansätze für das Vehicle Routing

Von den in der Einleitung dieser Unit angegebenen Lösungsansätzen sollen hier insbesondere die beiden ersten erläutert werden, exakte und heuristische Verfahren.

Exakte Lösungsverfahren

Exakte Verfahren versuchen die Weglängen aller möglichen Rundreisen zu berechnen und dabei die kleinste Weglänge auszuwählen. Bei dem Travelling-Salesman Problem bzw. Vehicle Routing Problem handelt es sich jedoch oft um ein deterministisch polynomial nicht mehr lösbares Problem (NP-schweres Problem), der Aufwand für die Berechnung sämtlicher möglicher Routen ist also zu hoch [**?**] . Insbesondere bei der Lieferroutenplanung, sind es oft sehr viele Stationen (Kunden), die beliefert werden müssen.

Heuristische Lösungsverfahren

Heuristische Lösungesverfahren sind unumgänglich, wenn es sich um eine grosse Menge an zu verarbeitenden Daten (z.B. zu beliefernde Kunden) handelt. Sie lassen sich untergliedern in Eröffnungverfahren (oder auch Konstruktionsverfahren) und Verbesserungsverfahren, je nachdem, ob neue Routen konstruiert werden, oder bestehende Routen verbessert werden. Ihnen fehlt allerdings die Möglichkeit eine Güteabschätzung der mit ihnen ermittelten Routen vorzunehmen.

Eröffnungsverfahren nutzen z.B. die Nearest-Neighbour-Heuristik um an jedem Standpunkt sich für das nächstgelegene Ziel entsprechend der Länge der Verbindungslinien zu entscheiden (siehe Dijkstra). In der Nearest-Insertion-Heuristik hingegen wird zusätzlich überprüft, ob sich Stationen in der Nähe der Verbindungslinien zwischen zwei Stationen befinden. Ist eine solche Station gefunden, wird sie zwischengeschaltet.

Mit Hilfe von Verbesserungsverfahren wird versucht, eine Verkürzung existierender Routen mittels kleinerer Modifikationen zu erzielen.

Bott und Ballue nennen vier verschiedene Kategorien heuristischer Ansätze zur Lösung des Vehicle-Routing-Problems [**?**] :

- Cluster first, Route second Ansätze
- Route first, Cluster second Ansätze
- Savings or insertion Ansätze
- Exchange or improvement Ansätze

Es ist zu beachten, dass in der Praxis häufig kombinierte Verfahren wie etwa die Cluster first, Route second Ansätze zum Einsatz kommen. Hier erfolgt zuerst eine Zuordnung von Kunden zu den Depots, erst danach erfolgt das eigentliche Routing. Andere Herangehensweisen gehen davon aus, dass eine nicht adäquate Zuordnung zu einem schlechten Routing führt, so dass eine erste Einteilung der Routen durch Modifikation sukzessive verbessert wird (exchange or improvement Ansätze) [**?**] .

1.5 Zusammenfassung

In dieser Lektion wurde die Netzwerkanalyse behandelt. Die Netzwerkanalyse befasst sich in erster Linie mit den Beziehungen zwischen Objekten. Um diese (Distanz-) Beziehungen zu untersuchen, braucht es genaue Kenntnisse der vorhandenen Grundelemente (vgl. Primitives of a Network), desweiteren Masse, mit Hilfe derer eine Beschreibung der Struktur von Netzwerken möglich ist (vgl. Structural Properties of a Network).

Die Berechnung von kürzesten Wegen ist ein häufiger Anwendungsfall der Netzwerkanalyse bzw. der Graphentheorie. In diesem Zusammenhang ist der Dijkstra Algorithmus vorgestellt worden, der am häufigsten verwendete Algorithmus zur Berechnung kürzester Wege in kantengewichteten Graphen. Der Pseudocode des Algorithmus wurde vorgestellt, sowie mittels einer Animation die Funktionsweise des Algorithmus Schritt für Schritt erläutert. Es wurde darüber hinaus betont, dass für spezielle Anwendungsgebiete und spezielle Arten von Graphen (Gewichtung von Knoten, negative Kantengewichtungen) es einer Modifikation bzw. alternativer Algorithmen bedarf um eine Distanzberechnung durchzuführen.

Desweiteren wurde das Travelling Salesman Problem (TSP) vorgestellt, welches die Frage behandelt, auf welche Weise eine Routenberechnung so optimiert werden kann, dass nach Besuch mehrerer Orte und Rückkehr zum Anfangsort eine möglichst geringe Distanz zurückgelegt wurde. In diesem Zusammenhang wurde das Vehicle Routing Problem vorgestellt, welches das TSP dahingehend erweitert, dass hier etwa auch Minimierung der Transportkosten oder die Minimierung der Anzahl der benutzten Fahrzeuge berücksichtigt wird. Als Lösungsansätze in diesem Bereich bieten sich exakte und heuristische, ferner interaktive und kombinierte Lösungsverfahren. Es wurde ausgeführt, dass aufgrund häufig grosser Datenmengen heuristische Ansätze in der Praxis meist den Vorzug erhalten, da exakte Lösungsansätze zu rechenaufwendig sind.

Glossar

Algorithmus von Borvka:

Algorithmus von Dijkstra:

Algorithmus von Kruskal:

Bellman-Ford Algorithmus:

Graph: Besteht aus einer Menge an Knoten und Kanten, die auf unterschiedliche Art und Weise miteinander verknüpft sein können. Je nachdem werden ungerichtete von gerichteten Graphen unterschieden, planare von nicht-planaren Graphen. Bei ungerichteten Graphen unterscheidet man zudem zwischen zyklischen, vollständigen oder gewichteten Graphen. Bei gerichteten Graphen zudem zwischen

Heuristik:

Kante:

kantengewichtet:

Knoten:

minimaler Spannbaum:

Pfad:

Routenplanung (Routing):

Shortest Path:

Travelling Salesman Problem:

Vehicle Routing Problem:

Vertex: